



TITLE:

凸性, 補完性とゲーム理論 (非線形解析学と凸解析学の研究)

AUTHOR(S):

木戸, 一夫

CITATION:

木戸, 一夫. 凸性, 補完性とゲーム理論 (非線形解析学と凸解析学の研究). 数理解析研究所講究録 2010, 1685: 167-176

ISSUE DATE:

2010-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141446>

RIGHT:

凸性, 補完性とゲーム理論

慶應義塾大学 商学部 木戸 一夫 (KIDO, Kazuo) *

(Faculty of Business and Commerce, Keio University)

1 はじめに

凸性, 補完性, およびゲームは, 経済あるいはビジネスを考察する際の重要な概念である。複数の概念がからみ合った部分に焦点を当て, いくつかの結果を紹介する。

まず, コーディネーション・ゲームから出発し, 利益の源泉として重要な補完性の概念を簡単にまとめておく。典型的なコーディネート・ゲームとして知られているのは男女の争いゲームである。それは, 次の利得行列で与えられる。

	女	オペラ	野球
男			
		3	0
オペラ	2		0
		1	2
野球	1		3

このゲームで, 例えば男の利得は, 次のような性質を持っている。何もしないときの利得を 0 とし, 女が野球に行かないとき, 自分が野球に行くと, 利得は 0 から 1 に増える。これに対し, 女が野球に行くとき, 利得は 0 から 3 に増えることになる。すなわち, 自分としては「野球に行く」という同じ行動で得られる利得の増分が, 女が野球に行かないときより, 野球に行くときの方が大きいのである。これを数式で定式化する。

$f(x, y)$: 男の利得;

$x = 0$: 男が野球に行かない, 1 : 男が野球に行く;

$y = 0$: 女が野球に行かない, 1 : 女が野球に行く

とすると,

$$f(1, 0) - f(0, 0) = 1 - 0 = 1 < 3 = 3 - 0 = f(1, 1) - f(0, 1)$$

という関係が成り立つ。女の利得 $g(x, y)$ に対しても同様に,

$$g(0, 1) - g(0, 0) = 0 < 2 = g(1, 1) - g(1, 0)$$

となっている。すなわち, 男と女が別々に野球に行くより, 一緒に行くことにより, それぞれに対して追加の利得 (すなわち, 補完性の利益) が 2 ずつ発生している。この関係を一般化したのが差分増加性の概念である。

定義 1 ([13]). X, Y を半順序集合とし, $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ が (x, y) に関して差分増加性を持つとは, X における任意の $x \leq x'$ と Y における任意の $y \leq y'$ に対して,

$$f(x', y) - f(x, y) \leq f(x', y') - f(x, y') \quad (1.1)$$

となることをいう。

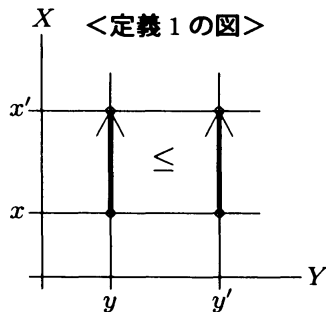
*E-mail: kkido@fbc.keio.ac.jp

この定義は、Edgeworth=Pareto[2] による補完財の定式化に由来するものであり、更に次のような一般化を持つ。

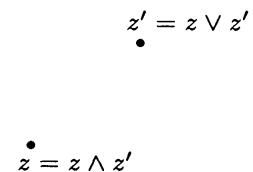
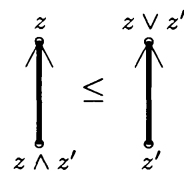
定義 2 ([13]). Z を束とし, $f(z) : Z \rightarrow \mathbb{R}$ が z に関してスーパーモジュラーであるとは, Z における任意の z と z' に対して,

$$f(z) - f(z \wedge z') \leq f(z \vee z') - f(z') \quad (1.2)$$

となることをいう。



<定義 2 の図>



例 1. $N = \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合として, $Z = 2^N$ とする. $v : Z \rightarrow \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0$ がスーパーモジュラーであることは,

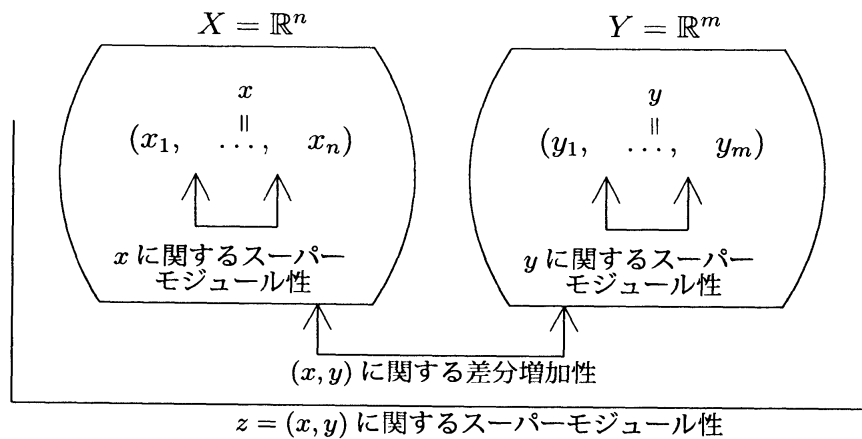
$$v(A) + v(B) \leq v(A \cup B) + v(A \cap B), \quad \text{任意の } A, B \subset N$$

が成り立つということである。これは, v を特性関数とする n 人協力ゲームが凸ゲームになる条件に他ならない。

次に, 差分増加性とスーパーモジュール性という 2 種類の補完性の定義の性質と関係を少しまとめておく。

命題 1 ([13]). (1) X が鎖ならば, X 上の任意の実数値関数はスーパーモジュラーである。
 (2) X, Y および $Z = X \times Y$ はそれぞれ束とし, $f(z)$ は Z 上の実数値関数とする。 $f(z)$ が Z 上で $z = (x, y)$ に関してスーパーモジュラーであるとする, $f(x, y)$ は $X \times Y$ 上で (x, y) に関して差分増加性を持つ。
 (3) (2) と同じ条件で, 逆に, $f(x, y)$ が, $X \times Y$ 上で (x, y) に関して差分増加性を持ち, 任意に固定された $y \in Y$ に対して X 上で x に関してスーパーモジュラー, 任意に固定された $x \in X$ に対して Y 上で y に関してスーパーモジュラー, ならば, f は Z 上で $z = (x, y)$ に関してスーパーモジュラーである。

この命題は, 次のように理解できる。



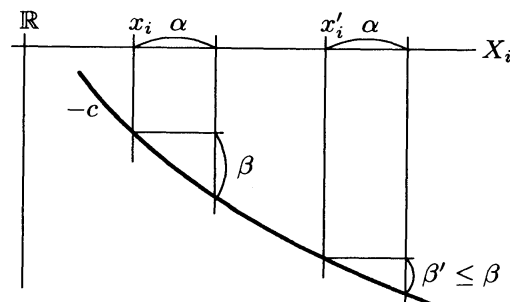
いずれにせよ、差分増加性、スーパーモジュール性は、相異なる2つの方向性：

$$\begin{cases} x_i \text{ と } y_j & i, j; \\ x_i \text{ と } x_j & i \neq j; \\ y_i \text{ と } y_j & i \neq j \end{cases}$$

のいずれかに関する概念なのであり、それゆえに自由度が1しかない鎖の上では意味を持ち得ない、ということを行っているのが命題1の(1)である。この意味で、差分増加性とスーパーモジュール性を相互補完性という。それに対して、1次元的な補完性は意味がないのか？という、決してそうではない。例えば、コスト補完性という概念の中には、各 x_i ごとの性質として、任意の $x_i \leq x'_i$ と α に対して

$$c(x_i + \alpha) - c(x_i) \geq c(x'_i + \alpha) - c(x'_i) \quad (1.3)$$

であることが含まれている。ここで、 $c(x)$ はコストを表す関数なので、マイナスを付けて(1.3)式を図示すると、次のような相互補完性と平行な図が得られる。



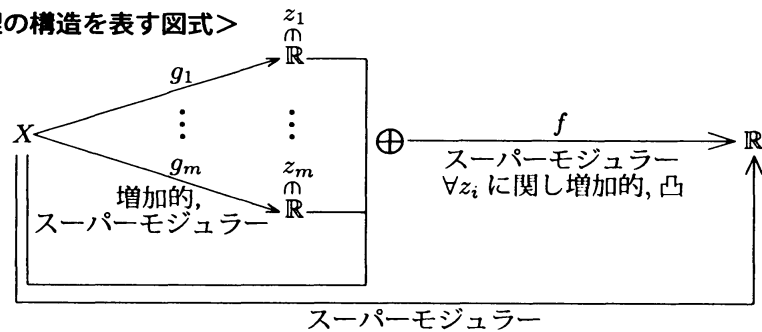
この相互補完性との対比性から、(1.3)式を満たす性質を自己補完性と概念化する。自己補完性は、相互補完性とは独立な概念であり、補完性を詳細に分析する際には欠くことのできない概念である。自己補完性は、規模の経済やネットワーク外部性とも関係している上、関数の連続性があると(1次元の)凸性と同値になる。従って、本論では、簡単のため、1次元の凸性としてのみ自己補完性を取り扱う。多次元においては、凸性、相互補完性、自己補完性の関係は複雑である。これは、経済学におけるコストに関連した諸概念間の関係の複雑さと同様である。

2 自己補完性の実現

前節でみたように、補完性はプラス α の利益を意味する。ここでは、企業の中で、どうしたら利益関数に自己補完性を持たすことができるか、そのための方策を考える。まず合成関数が補完性を持つための十分条件を与える定理を考え、その応用としていくつかの方策を定式化する。この方向の最初の定理は Topkis[13, Lemma 2.6.4] による。

定理 1 ([13]). X は束、 X 上の実数値関数 $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, は x に関して増加的かつスーパーモジュラーであるとする。 Z_i は, $i = 1, \dots, m$ に対して, \mathbb{R} の凸部分集合で, $g_i(x)$ の値域を含み, $f(z_1, \dots, z_m, x)$ は $(\times_{i=1}^m Z_i) \times X$ 上で (z_1, \dots, z_m, x) に関してスーパーモジュラーな実数値関数で, 各 $i = 1, \dots, m$ に対して, z_i に関して増加的かつ凸であるとする。このとき, 合成関数 $f(g_1(x), \dots, g_m(x), x)$ は X 上で x に関してスーパーモジュラーである。

<定理の構造を表す図式>



この定理は、もともとは次の例 [13] におけるような合成関数の性質を得るために考えられた補題である。

例 2. 単一の生産物を生産しマーケット活動を行なう利益最大化企業をモデル化する。企業は、パラメータで定まる外部環境の中で活動しているとしよう。 R^m の部分束 T に属すベクトル t で、企業の意思決定問題の異なる局面を定めると考えられるパラメータを表す。パラメータ t の異なる値が、最適決定と企業利益に与える影響について考えてみる。 R^n の部分集合 X に属すベクトル x で企業が意思決定として選択する決定変数を表す。パラメータと決定変数の具体的な成分は、例えば、技術、品質、広告、市場規模、時間、などの要因を想定している。製品の価格は p で表すが、このモデルでは、価格は固定されているものとする。製品需要を $\mu(x, t)$ で表し、それは、決定変数 x とパラメータ t で定めると考える。ある生産水準 z に対して、決定変数 x とパラメータ t にも依存した生産コスト $c(z, x, t)$ がかかるが、企業の生産は、企業の決定変数とパラメータから定まる需要 $\mu(x, t)$ にちょうど等しいと仮定する。このとき、企業の総収益は $p\mu(x, t)$ で与えられる。また、コストとしては、生産コスト $c(\mu(x, t), x, t)$ の他に、生産水準や製品需要には依存しないコスト $k(x, t)$ も考える。以上をまとめると、企業の利益関数は、

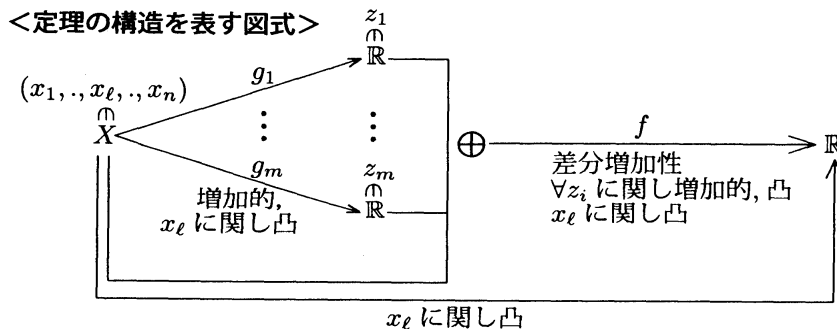
$$\Pi(x, t) = p\mu(x, t) - c(\mu(x, t), x, t) - k(x, t) \quad (2.1)$$

となる。

定理 1 は、少し見方を変えることにより、次のような状況の分析にも使えることがわかる。企業の中にはさまざまなアクティビティがあり、それらは組み合わせりながら、より高次の（より抽象的な）アクティビティを形成し、積み重なっていった最終結果として利益に結びついている、と考

えられるとする。この階層構造の一段一段の積み重ねは合成関数を考えることに相当し、合成関数を構成する一階層下の要素（アクティビティ）、および、それらの合成の仕方が、定理の条件で示されているような相互補完性、自己補完性、増加性といった性質を持つならば、寄せ集めた全体としても相互補完性を持つことが定理1により保証される。この合成を繰り返すことにより、最終的には、企業の利益は、最下層のアクティビティに関し相互補完的な利益を含んだものであることが示される。この相互補完性の証明法は、問題を小さく分解して扱いやすくしているのと同時に、企業の機能的構造を効率良く利用したものになっているはずである。これに対し、合成関数が自己補完性を持つための十分条件を与えるのが次の定理である。

定理 2 ([7]). X は \mathbb{R}^n に含まれる凸部分束とし、 $\ell \in \{1, \dots, n\}$ とする。各 $i = 1, \dots, m$ に対して、 X 上の実数値関数 $g_i(x)$ は x に関して増加的で、さらに x_ℓ に関して凸であるとし、 Z_i は \mathbb{R} の凸部分集合で $g_i(x)$ の値域を含むものとする。 $f(z_1, \dots, z_m, x)$ は $(\times_{i=1}^m Z_i) \times X$ 上の実数値関数で、 (z_1, \dots, z_m, x) に関して差分増加的で、各 $i = 1, \dots, m$ に対して、 z_i に関して増加的かつ凸、かつ、 x_ℓ に関して凸であるとする。このとき、合成関数 $f(g_1(x), \dots, g_m(x), x)$ は、 x_ℓ に関して凸である。



この定理の応用として、企業の利益が何かしらのアクティビティ水準に関して自己補完的になるパターンをいくつか示すことができる。例えば、簡単のために条件を強めた形として、次の定理が導かれる。

定理 3 ([7]). X は \mathbb{R}^n の凸部分束、 Y は \mathbb{R}^m の直方体の形状を持つ凸部分束とし、 X と $f(x, y)$ をプレイヤー1の戦略集合および利得関数、 Y と $g(x, y)$ をプレイヤー2の戦略集合および利得関数とした2人-戦略形ゲームを考える。さらに、それがスーパーモジュラー・ゲームであるとする。すなわち、 $x \in X, y \in Y$ として、 $f(x, y)$ は (x, y) に関して差分増加性を持ち、各固定された y に対して x に関してスーパーモジュラー、 $g(x, y)$ は (x, y) に関して差分増加性を持ち、各固定された x に対して y に関してスーパーモジュラーとする。 $\ell \in \{1, \dots, n\}$ でベクトル x の任意に固定された座標を表すものとする。追加的条件として、 $f(x, y)$ は、 x_ℓ に関し増加的かつ凸で、任意に固定された x に対して y に関して増加的かつアフィンであるとする。 X 上で *well-defined* な、プレイヤー1の戦略 x に対するプレイヤー2の最適応答戦略からの増加的選択 $\mu(x)$ で、 x に関してアフィンであるものが存在すると仮定する。このとき、 $f(x, \mu(x))$ は x に関してスーパーモジュラーで、 x_ℓ に関して増加的かつ凸である。

例えば、コンサートでプレイヤーが、練習を積んだ結果として、良いパフォーマンスをしたり、会場に来たファンに呼びかけたりすれば、それだけでも良いステージを提供できた、という自己満足は得られるだろう。しかしながら、そのパフォーマンスや呼びかけに応じて観客が立ち上がって

拍手を送ったりすれば、受け入れられたという気持ちで、より一層高い満足感が得られるだろう。こうした連鎖が見込めるなら、あるいは経験をしたことがあるならば、日頃の厳しい練習にも一層身が入り、結果として、より高いレベルのステージとなり、プレイヤーにも観客にもより高い満足がもたらされることになるだろう。定理3は、このような状況をとらえたものである。

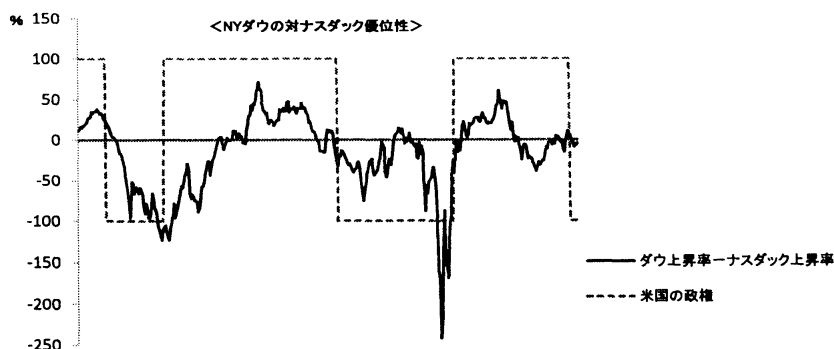
3 コーディネーション・ゲームのナッシュ均衡解の再検討

ここで、第1節で提示した男女の争いゲームに戻り、ゲームの解について考察しよう。このゲームの純粋戦略のナッシュ均衡は、両者に補完性の利得をもたらす（オペラ、オペラ）と（野球、野球）の2つであり、解の一意性がない。そのため、均衡概念の精緻化に進むという方向もあるが、社会科学への応用上は、不完備性は本質的な問題とはならない。むしろ、信念や焦点といった概念を考え合わせることで、比較制度分析 [1] のような深い結果が得られる源泉となっていることに注意したい。

一方、混合戦略のナッシュ均衡がパレート劣位な解になることは良く知られている。それは、戦略の単純なミックスのため、（オペラ、野球）や（野球、オペラ）のような非効率な状況が正の確率で生起するためである。そこで考えられたのが相関均衡の概念である。身近の例では、ねじれのあるコーディネーション・ゲームのケースになるが、交差点における信号に基づいた交通がある。両者が信号に従うことにより、事故という非効率を避けることができ、また、両者ともにいつかは通行することができ、その規則から逸脱する動機は生じない。シグナルに応じて行動を変化させるという相関均衡の概念をより一般化して捉え直したい。特に、2種類の戦略を空間的分布から時間的分布に変えることにより、双方とも効率的に生き残れる点に着目する。

各プレイヤーに公平な相関均衡は、（1）各プレイヤーは外部の公平と認められるシグナルに依存して行動を選択し、（2）非効率な行動の組み合わせは生起することはなく、（3）どちらの戦略も公平に選択されることになる、という特徴を持つ。これは、生物の多様性・共存性を語った生物学者である難波 [9] の次の文を想起させる。「同じニッチ（資源や生活場所）を利用する複数の生物種は共存できないという競争排除の原理はよく知られている。しかし、簡単な数学モデルやビーカーの中の実験系と異なり、自然界では生活要求の似通った多くの種が共存しているように見える。この事実を説明する仮説として、Hutchinson は環境の時間的変動に注目した。競争関係にある2つの種を S_1 と S_2 とする。種 S_1 は温暖な気候に適した種、種 S_2 は寒冷な気候に適した種だとして。2種の生物が同じ地域に生息し共通の資源をめぐる争い争うとき、気候の変化がなければ、それが温暖か寒冷かによって、一方の種が有利となり他方の種を駆逐してしまう。しかし、多くの地域では気候は季節的にも年によっても変動するから、互いに多種を排除するまえに優劣が逆転し、多くの種が共存できるだろうというのが Hutchinson のアイデアである。」

以上から、公平さを持った相関均衡は、周期的に変化する外部環境があり、各プレイヤーがそれに応じた最適な戦略選択をすることにより、多様性とプレイヤーの行動の周期的変化を表す均衡概念を提供していることがわかる。次節では、この均衡概念をさらに追及する枠組みを提供するが、それによって、どのような現象をモデル化することを目指しているのか、例を一つ示しておく。この例は、シグナルを一般化することにより同じ枠組みに入ってくるものである。シグナルの概念を一般化する方向は、事後的な公平性を保証するものから、事前の機会の公平性を保証するものに一般化する、ということである。これによって、社会現象への応用範囲が広がり、例えば、政権を選択する選挙という仕組みも対象に入ってくるので、政権に依存した社会の行動選択を表す次のグラフ [6] で示される状況も応用研究の対象となる。



グラフは、米国における政権の変化と、ダウ市場のナスダック市場に対する投資上の優位性を比較したものである。環境として考えているものは、アメリカの政権が共和党であるか民主党であるか、である。グラフの中では、共和党政権である時は100、民主党政権である時は-100とし、点線で表示している。実線で表示しているのは、NY Dow Jones Industrial Average (^DJI) の月末株価の4年前同月末株価に対する上昇率(%)から、NASDAQ Composite (^IXIC) の月末指数の4年前同月末指数に対する上昇率(%)を減じた数値である。この数値は、経済活動の戦略間の優劣を表す指標になると考えている。すなわち、株価が企業業績を反映すると考えたとき、実線で表した数値がプラスの値であれば大企業に有利な状態で、資本の力に依存した戦略が相対的により多くの利益を得ていることを意味し、逆に、マイナスの値であればハイテク・ベンチャー企業に有利な状態で、先端技術の優位性に依存した戦略が相対的により多くの利益を得ていることを意味する、とおおよそ考えられる。グラフでは、1975年2月から2009年7月分までプロットしている。多少のタイムラグはあるものの、両者の大きな変動には高い相関が認められる。すなわち、政権という環境の変化と、環境下で優勢になるビジネス戦略の変化が強く関連していることが推察される。ラフに考えると、多くの企業が時の政権あるいは政策（による利得構造の変化）を認識し、それにできる限り適合した意思決定をした結果であり、進化的なプロセスである、といえる。

実際には、機会の平等性をモデル化することは容易ではないので、結語において研究の方向性に触れるにとどめる。次節では、変化は周期的と仮定し、環境の変化および環境に応じた行動の変化の双方に慣性が働くモデルを提起し、考察を加える。

4 周期的に変化する利得行列を持った進化ゲーム

コーディネーション・ゲームから始まった話だが、2つの方向に発展させる。まず、多数のプレイヤーの中から各時点で限られた数のプレイヤーがランダムに選ばれてプレイする大規模ゲームとする。プレイヤーが選ばれた時点での戦略選択はレプリケーター・ダイナミクスに従うものとする。すなわち、その時点での各戦略の期待利得を計算し、その相対的大きさで、その戦略を取るプレイヤー集団のシェアの成長率を定める。このダイナミクスにより、プレイヤーの行動選択に慣性が働くことを表現できる。

もう一つの方向性としては、ゲームに環境を表す外生変数を導入する。外生変数の変化に応じてゲームの利得構造が変化すると考えるが、特にその変化は周期的で滑らかなものとする。滑らかさの仮定により、環境変化の影響が社会に浸透する部分にも慣性が働くことを表現できる。例えば、政権が入れ替わっても、これまでの全政策を瞬間的に変えることは不可能なので、この仮定は現実的である。以上を総合して、次のモデルを得る。

まず、対極的な2つのフェーズにおける利得行列を

フェーズ C	G	L
G	a	b
L	0	d

フェーズ T	G	L
G	d	0
L	b	a

とする。ただし、 $a > d > 0, b > 0$ とする。また、表中の利得は行プレイヤー（行を選ぶプレイヤー）の利得を表し、列プレイヤーの利得は対称的に定まるとする。環境変化により利得は両フェーズの間を周期的かつ滑らかに変化することを次のように表す。

$x = (x_G, x_L), x_G \geq 0, x_L \geq 0, x_G + x_L = 1$ で、戦略 G および戦略 L をとる集団のシェアの分布を表し、あるプレイヤーが戦略 i ($i = G$ または $i = L$) をとってフェーズ C のゲームをした時の期待利得を $u_C(e^i, x)$ で表し、フェーズ T のゲームをした時の期待利得を $u_T(e^i, x)$ で表す。時刻 t において、あるプレイヤーが戦略 i をとってゲームをした時の期待利得を

$$u_t(e^i, x) = u_C(e^i, x) \cdot \cos^2(\beta t) + u_T(e^i, x) \cdot \sin^2(\beta t)$$

と定め、レプリケーター力学系を、

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = \alpha \cdot u_t(e^i - x(t), x(t)) \cdot x_i(t), \quad i = G, L \quad (4.1)$$

と定める。ここで、 $\alpha > 0$ は、集団全体が戦略を変更する速さを左右するので、集団の戦略選択に働く慣性の大きさを表現したものと考えられる。 α が小さいほど、変化する速さが遅く、強い慣性が働いていることになる。 $\beta > 0$ は、利得構造の周期変動の進行速度を表すパラメータであり、環境変化を源泉とした集団の利得構造変化に働く慣性の大きさを表現したものと考えられる。ここでも、 β が小さいほど、強い慣性が働いていることになる。

$x_G + x_L = 1$ の関係を用いて変数 x_L を消去し、インデックスの記述を省略すると、

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) = \alpha x(t)(1 - x(t))\{(b - d) + (a - (b - d))x(t) - (a + b - d)\sin^2(\beta t)\} \quad (4.2)$$

となる。これは、周期的に変化する係数を持った非線形非自励力学系である。 $f(t, x)$ は性質が良いので、解の一意存在性は一般的な定理 [3] による。

命題 2. 任意の $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ に対して、微分方程式 (4.2) は一意的な大域的解 $x(t, t_0, x_0), t \in \mathbb{R}$ を持ち、次の条件が満たされる：

- (1) $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$;
- (2) 任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して、 $x(s + t, s, x(s, 0, x_0)) = x(s + t, 0, x_0)$;
- (3) $x(t, t_0, x_0)$ は (t, t_0, x_0) の関数として（結合）連続。

問題となるのは、非自明な周期解の存在性と、周期解への漸近性である。周期解への漸近性に関しては数理生物学などで研究が進んでおり、微分方程式 (4.2) に対する結果は、多変数の平面競争系もしくは共生系の結果 [11] から導かれる。（方程式は (4.2) は一変数なので、大域解の一意存在性から順序保存力学系となることが効いてくる。）

定理 4. [11, Theorem 7.6]. 任意の初期値 $0 \leq x_0 \leq 1$ に対してある $0 \leq \bar{x} \leq 1$ が存在して、解 $x(t, 0, x_0)$ は周期解 $x(t, 0, \bar{x})$ に単調に漸近する。また、周期解は環境の周期と同じ周期を持つ。

次に、非自明な周期解の存在性およびパーシステンスに関して考察する。パーシステンスの概念は、生態系の全ての構成要素が生き残る、というアイデアを定式化したもので、微分方程式 (4.2) の場合

は、 $0 < x_0 < 1$ を満たす任意の初期値に対する解が、 $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, 0, x_0) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t, 0, x_0) < 1$ を満たすことと定義される（ただし、[11]における定義による）。定理 4 を考えると、力学系がパーシステントである必要条件是、非自明な、当該ケースでは常時 0 でも常時 1 でもない、周期解が存在することである。

定理 5 ([6]). 微分方程式 (4.2) には、非自明な周期解が少なくとも 1 つは存在する。

十分条件はまだ得られていない。ここでは、力学系がパーシステントにならない十分条件と、解が $x = 0$ の近傍から $x = 1$ の近傍まで変化するための十分条件、ならびにそれらの政策的含意を示す。

定理 6 ([6]). $b < d$ が成り立つとき、 $x(t) = 0$ と $x(t) = 1$ は次の意味で強く吸引力的な周期解である。すなわち、ある $\epsilon > 0$ が存在して、任意の $x_0 : 0 < x_0 < \epsilon$ に対して、 $x(t, 0, x_0)$ は単調減少で、 $t \rightarrow \infty$ としたとき 0 に収束する。同様に、任意の $x_0 : 1 - \epsilon < x_0 < 1$ に対して、 $x(t, 0, x_0)$ は単調増加で、 $t \rightarrow \infty$ としたとき 1 に収束する。

証明は微分不等式の評価による。定理 6 は次のように解釈できる。 $b < d$ のとき、フェーズ C および T のゲームは、男女の争いと同じタイプのコーディネーション・ゲームで、均衡では補完性の利得が得られている。 $x = 0$ および $x = 1$ は純粋戦略のナッシュ均衡を表すが、条件により、一方にパレート優位性がある。利得構造が変化してパレート優位なナッシュ均衡がパレート劣位な均衡に変化しても、ナッシュ均衡ではあり続けるため、慣性が強く働き、均衡変化は難しく、逆に現在焦点になっている均衡が強化されることすらあり得る。すなわち、 $x = 0$ および $x = 1$ の吸収域はかなり広い。

その結果、政策的含意として、もし新しくパレート優位になる均衡に移ることが社会的に求められているならば、変化の初期時点において、経済特区のようなある程度の規模の戦略変更集団を意識的あるいは強制的に作り出す必要がある、ということが得られる。

定理 7 ([6]). $a + d > b > d$ が成り立つとする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ と任意の $\epsilon' > 0$ に対して $1 \geq x_0 \geq \epsilon'$ 、かつ、環境変化の進行速度 β に対して系の進行速度 α が十分に速ければ、解 $x(t, 0, x_0)$ は 1 の ϵ -近傍まで少なくとも 1 度は到達する。

$a + d > b > d$ の条件のもとでは、特徴的な局面であるフェーズ C および T において絶対優位な戦略が存在し、時間の経過とともに絶対優位な戦略が入れ替わる。すると、先のケースと違ってナッシュ均衡的しびりがないので、新たな均衡にすんなりと移行するとも思えるが、その場合でも、戦略の変更速度 α が環境の変化速度 β と比べて十分速い必要がある、という点が定理 7 のポイントである。行動変化が遅れれば、時間切れの形で再び環境が向かい風に変化し、失速してしまう可能性がでてくる。

その結果として、定理 6 の状況のような経済特区的政策は限られたものでも良いが、戦略変更の迅速化を促す政策を実施することは必要、という政策的含意が得られる。

5 結語

まず、パーシステンスに関して、経済特区を設け常に一定比率以上の戦略集団が存在することを保証したり、同じ効果をもたらすものとして、ランダムに戦略選択をする一定比率の突然変異をモデルに加味すれば、系のパーシステンスは満たされ易くなる。理論的定式化は今後の課題だが、その効果は計算機を使ったシミュレーションでは確認されている。

次に、第3節の例では、選挙による政権交代を環境変化としていた。環境変化に依存して社会の行動変化が起こり、その結果、格差の拡大などの社会の変化も発生する。それによって有権者の「何を第一義とするか」という選好も変化し、それが選挙における政権選択を決める。このような流れを定式化すれば、外生変数として扱ってきた政権を内生化することも可能であろう。この研究も今後の課題である。

最後に、上記の発想から示唆されることとして、空間のノルム構造や順序構造のような、社会の評価尺度や選好を反映する構造を（時間の経過によって）変化させたときに生じる現象の研究も価値がある、と指摘しておきたい（Cf. [4, §4]）。

参考文献

- [1] Aoki, M. (2001), *Towards a Comparative Institutional Analysis*. Massachusetts: MIT Press. (瀧澤弘和, 谷口和弘訳『比較制度分析に向けて』, NTT 出版, 2001)。
- [2] Edgeworth, F. Y. (1925/1993), "The pure theory of monopoly," in Volume 1 of *Papers relating to political economy*, edited by F. Y. Edgeworth. Bristol: Thoemmes Press.
- [3] Hale, J.K. (1980), *Ordinary Differential Equations*. R.E. Krieger Publishing.
- [4] Kido, K. (2005), "Convergence Theorems for ℓ_p -Norm Minimizers with Respect to p ," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 125.3, pp.577-589.
- [5] 木戸一夫 (2007), 「補完性と階層構造」『三田商学研究』第 50 巻 5 号, pp.31-44.
- [6] 木戸一夫 (2009), 「環境変化に依存した周期変動と進化ゲーム」『三田商学研究』第 52 巻 3 号, pp.47-60.
- [7] Kido, K. (to appear), "A Functional Approach to Prove Complementarities," *Taiwanese Journal of Mathematics*.
- [8] Komiya, H. (2008), "A Distance and a Binary Relation Related to Income Comparisons," *Advances in Mathematical Economics*, 11, pp.77-93.
- [9] 難波利幸 (1997), 「環境変動と生物拡散」巖佐庸編『数理生態学』共立出版, 1997 年。
- [10] Rockafellar, R. T. (1970), *Convex Analysis*. Princeton University Press.
- [11] Smith, H.L. and P. Waltman (1995), *The theory of the chemostat —Dynamics of microbial competition—*, Cambridge: Cambridge University Press. (竹内康博監訳『微生物の力学系—ケモスタット理論を通して—』日本評論社, 2004 年)。
- [12] Topkis, D. M. (1978), "Minimizing a submodular function on a lattice," *Operations Research*, 26, pp.305-321.
- [13] Topkis, D. M. (1998), *Supermodularity and Complementarity*. Princeton: Princeton University Press.
- [14] Weibull, J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory*. Massachusetts: MIT Press. (大和瀬達二監訳『進化ゲームの理論』オフィス・カノウチ, 1998 年)。